



Martin-Luther-Universität  
Halle-Wittenberg  
FB Physik

## Fortgeschrittenen- Praktikum



# Versuch 14: Halleffekt am Germanium

- 1) Es ist das Magnetfeld als Funktion des Feldstromes bis 10A mittels Magnetometer zu bestimmen (Achtung höhe Ströme nur kurz fließen lassen!) Messen Sie die gesamte Magnetisierungskurve von -10A bis +10A und zurück.

Für eine intrinsische Germanium-Probe sind zu bestimmen:

- 2) Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes und des Magnetowiderstandes  $(\rho + \Delta\rho) / \rho$  (Benutzen Sie dazu die 6 $\frac{1}{2}$ -stelligen Tischmultimeter für die Messung von Strom und Spannung).
- 3) Die Abhängigkeit des Magnetowiderstandes vom Magnetfeld bei Raumtemperatur.
- 4) Aus der Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit die Breite der verbotenen Energiezone. Benutzen Sie einen Arrhenius-Plot:  $\ln \sigma = f(10^3/T)$ .
- 5) Mit dem Ergebnis aus 4) und den effektiven Massen von Ge  $m_n^* = 0,55 \cdot m_0$  und  $m_p^* = 0,37 \cdot m_0$  ist die Temperaturabhängigkeit der Eigenleitungskonzentration  $n_i(T)$  zu bestimmen.
- 6) Gesucht ist  $(\mu_n + \mu_p) = f(T)$ .

**Hinweise:** Proben temperatur  $< 160^\circ\text{C}$ ; Heizstrom  $< 3\text{ A}$ ; Probe immer nur kurz erwärmen, Aufbau nicht für Dauerbetrieb geeignet; Kristallmaße:  $l_x = 20\text{ mm}$ ,  $l_y = 10\text{ mm}$ ,  $h_z = 1\text{ mm}$ ; Probenstrom  $< 30\text{ mA}$ . Hinweise im Datenblatt des Hall-Experimentierrahmens beachten! Beachten Sie die richtige Orientierung der Platine mit dem Ge-Kristall! Der Kristall muss in Richtung der Bedienelemente zeigen, anderenfalls wird die Elektronik zerstört! Für die Messung der Hallspannung wird das Magnetfeld umgeschaltet (warum?).

Gegeben sind weiterhin zwei Störstellenhalbleiter: n-Ge und p-Ge. Man bestimme für beide Proben die Temperaturabhängigkeit folgender Messgrößen:

- 7) Elektrische Leitfähigkeit,
- 8) Hall-Spannung (beachten Sie das Vorzeichen!) und
- 9) Magnetowiderstand. Messen Sie außerdem bei Raumtemperatur die Abhängigkeit vom Magnetfeld für beide Proben.

Aus den Messergebnissen sind folgende Kenngrößen abzuleiten:

- 10) Die Hall-Beweglichkeiten für Elektronen und Löcher im Störleitungsbereich.
- 11) Für Raumtemperatur ist der Hall-Koeffizienten und die Hall-Beweglichkeiten zu ermitteln.
- 12) Die Donator- ( $N_d$ ) bzw. Akzeptorkonzentration ( $N_a$ ) der Störstellenhalbleiter ist zu

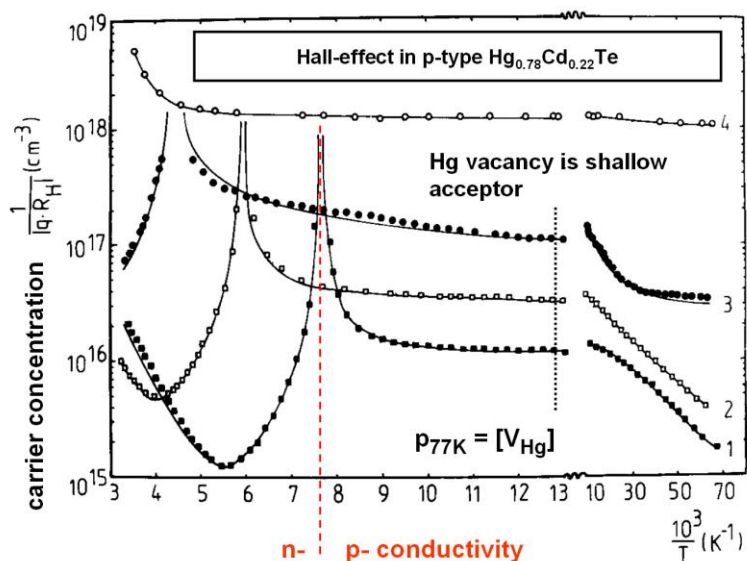
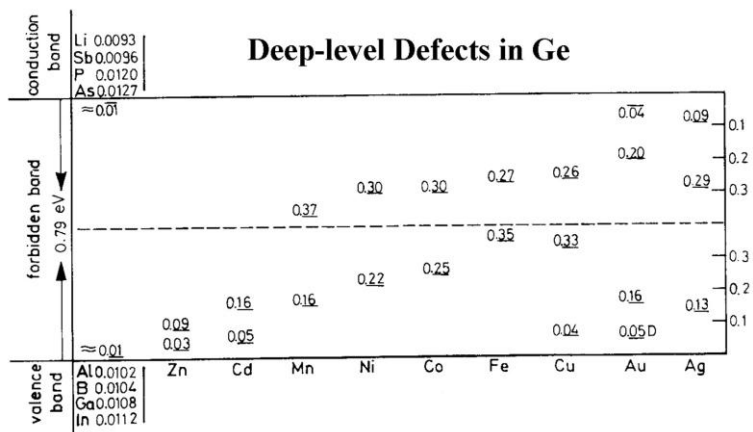
berechnen.

**Literatur:**

- Weißmantel-Hamann: Grundlagen der Festkörperphysik
- Ibach-Lüth: Festkörperphysik
- Bergmann-Schaefer Bd. 6
- Christman: Festkörperphysik
- Kittel: Festkörperphysik
- Ashcroft/Mermin: Festkörperphysik
- Joffé: Halbleiterphysik

**Kontrollfragen:**

- Was besagt die Matthiessensche Regel (Restwiderstand von Metallen)?
- Was beschreibt die „effektive Masse“?
- Was ist ein indirekter Halbleiter und welche Auswirkungen hat diese Eigenschaft auf seine Anwendung?
- Was versteht man unter intrinsischer Leitfähigkeit?
- Durch welche Größen wird die Leitfähigkeit eines Kristalls bestimmt?
- Welches ist der dominierende Streumechanismus für Ladungsträger in Metallen und schwach dotierten Halbleitern?
- Was ist der Ettinghausen-Effekt und was der Nernst-Effekt?
- Interpretieren Sie diese beiden Abbildungen!



## 1. Die elektrische Leitfähigkeit

In diesem Praktikumsversuch untersuchen wir Gesetze der Kinetik von Leitungselektronen in kristallinen Festkörpern. Das einfachste Gesetz der elektrischen Leitfähigkeit ist das Ohmsche Gesetz

$$U=IR. \tag{1}$$

Der Ohmsche Widerstand

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \tag{2}$$

ist über den spezifischen elektrischen Widerstand  $\rho$  material- und außerdem geometrieabhängig. Die spezifische elektrische Leitfähigkeit des Kristalls ist

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \tag{3}$$

Mit der Stromdichte  $j = I / A$  und dem elektrischen Feldvektor  $\vec{E}$  wird aus (1):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{4}$$

Das Ohmsche Gesetz (4) beschreibt in dieser Form den linearen Zusammenhang zwischen Stromdichte und Feldstärke, setzt also die Unabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von der Feldstärke voraus. Analog zum Massetransport ( $j = \rho_M v_D$ ; Stromdichte aus Massendichte und resultierender, gerichteter Driftgeschwindigkeit) ist die Stromdichte des Ladungstransports:

$$j = n \cdot e \cdot v_D \tag{5}$$

wobei die Massendichte ersetzt wird durch die Ladungsdichte der Leitungselektronen ( $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ As}$ ). Die Driftgeschwindigkeit der Leitungselektronen entsteht durch das äußere elektrische Feld. Letzteres bewirkt eine Störung des thermischen Gleichgewichts im Kristall. Der Gleichgewichtszustand der Leitungselektronen wird in Anlehnung an die kinetische Gastheorie mit dem Modell eines Elektronen"gas" beschrieben: Die Elektronen bewegen sich regellos mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in alle möglichen Richtungen, so dass keine resultierende Geschwindigkeit entsteht. Für den Mittelwert des Quadrats der Elektronengeschwindigkeiten im thermodynamischen Gleichgewicht gilt:

$$\frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \tag{6}$$

Da sich die Elektronen im Kristall in drei Raumrichtungen bewegen können und pro Freiheitsgrad nach dem Gleichverteilungssatz der Thermodynamik eine Energie von  $k_B T / 2$  zu veranschlagen ist, behandeln wir die Elektronen in diesem Modell als freie Elektronen ohne eine potentielle Wechselwirkungsenergie untereinander oder mit den Atomrümpfen. Dieser Idealzustand muss natürlich problemorientiert einem realistischeren Zustand angenähert werden. Ein in  $x$ -Richtung am Kristall angelegtes elektrisches Feld beschleunigt alle  $N$  Leitungselektronen in  $(-x)$ -Richtung. Die positive Feldrichtung zeigt per Definition von  $+$  nach  $-$ . Für

das beliebig ausgewählte  $i$ -te Elektron gilt demnach

$$m \cdot a_{ix} = -e \cdot E_x \quad \text{bzw.} \quad \frac{dv_{ix}}{dt} = -\frac{e}{m} E_x \quad (7)$$

Da die rechte Seite von (7) für alle Elektronen gilt, kann man mit einer mittleren Elektronengeschwindigkeit arbeiten:

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N v_{ix} \quad (8)$$

Sie gilt für alle  $N$  Elektronen, und mit (7) ist:

$$\frac{d\langle v_x \rangle}{dt} = -\frac{e}{m} \cdot E_x \quad (9)$$

Andererseits ist mit Anwendung von (5) jetzt

$$j_x = -n \cdot e \cdot \langle v_x \rangle \quad (10)$$

Das Minuszeichen in (10) folgt wieder aus der Festlegung der positiven Stromrichtung von + nach -, während die Richtung der Driftgeschwindigkeit  $\langle v_x \rangle$  für Elektronen dieser Richtung entgegengläuft. Differenziert ergibt (10):

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{n \cdot e} \cdot \frac{dj_x}{dt} \quad (11)$$

Aus (9) und (11) folgt

$$\frac{dj_x}{dt} = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot E_x \quad \text{bzw.} \quad j_x = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot E_x \cdot t \quad (12)$$

Für ein konstantes elektrisches Feld wächst die Stromdichte zeitlinear. Das ist im Widerspruch zur Realität des Ohmschen Gesetzes und eine Folge des Modells freier Elektronen in (9). Da bei Stromfluss Wärme entsteht, ist es gerechtfertigt, neben dem Beschleunigungsterm des elektrischen Feldes nach (9) einen Verzögerungsterm gleichen Betrages in den Transportvorgang einzubauen, so dass sich eine gleichförmige Kinetik mit  $d\langle v_x \rangle / dt = 0$  ergibt. Bei der gerichteten Bewegung der Elektronen durch das Kristallgitter entstehen zusätzliche Kollisionen mit den Atomrümpfen (Streuung). Dieser Energieaustausch via "Elektron-Gitter-Streuung" liefert die "Reibungskraft" zur Elektronenbewegung:

$$\left. \frac{d\langle v_x \rangle}{dt} \right|_{\text{el.Feld}} + \left. \frac{d\langle v_x \rangle}{dt} \right|_{\text{Streuung}} = 0 \quad (13)$$

Gleichung (13) ist die Boltzmannsche Transportgleichung. Der einfachste Weg zur Formulierung eines Streutermes in (13) führt über die Beobachtung der Zeitabhängigkeit des Verlaufs von  $\langle v_x \rangle(t)$  nach Abschalten des Feldes  $E_x$ . Das elementarste Abklinggesetz, das zur Einstellung des neuen Gleichgewichts führt (diesen Vorgang nennen wir Relaxation), ist:

$$\langle v_x \rangle_t = \langle v_x \rangle_{t_0} \cdot e^{-t/\tau} \quad (14)$$

Das elektrische Feld wird zur Zeit  $t=0$  abgestellt; nach der Relaxationszeit  $\tau$  ist die mittlere Driftgeschwindigkeit der Elektronen um den Faktor  $(1/e)$  gesunken. Nach (13) benötigt man

$$\left. \frac{d\langle v_x \rangle}{dt} \right|_{\text{Streuung}} = -\frac{\langle v_x \rangle}{\tau} \quad (15)$$

Vorausgesetzt, dass sich (15) für  $E_x > 0$  nicht ändert, können wir (15) in (13) einsetzen. Zusammen mit (9) in (13) erhält man

$$-\frac{e}{m} \cdot E_x - \frac{\langle v_x \rangle}{\tau} = 0. \quad (15a)$$

Umgestellt liefert diese Gleichung die mittlere Elektronendriftgeschwindigkeit im elektrischen Feld  $E_x$ :

$$\langle v_x \rangle = -\frac{e \cdot \tau}{m} \cdot E_x \quad (16)$$

Die Kombination von (16) mit (4) und (10) ergibt

$$\sigma = n \cdot e^2 \cdot \frac{\tau}{m} \quad (17)$$

Der Ausdruck

$$\mu = \frac{e \tau}{m} = \frac{\langle v_x \rangle}{E_x} \quad (17a)$$

wird als **Elektronenbeweglichkeit** bezeichnet. Mit dieser gilt für die elektrische Leitfähigkeit

$$\sigma = n \cdot e \cdot \mu \quad (18)$$

Die spezifische Leitfähigkeit von Kristallen wird von zwei Faktoren beeinflusst: der Konzentration der Leitungselektronen  $n$  und der Elektronenbeweglichkeit  $\mu$ . Zur Bestimmung beider Größen benötigt man neben (18) noch eine zweite Relation, d. h. eine zweite Messmethode. Diese wird uns durch den Hall-Effekt gegeben.

Mit (14) wird eine Einstellzeit zwischen zwei Gleichgewichtszuständen definiert, dem thermodynamischen und dem durch ein äußeres elektrisches Feld gestörten thermodynamischen Gleichgewicht. In Fig.1 ist dargestellt, was aus energetischer Sicht in einem Elektronenband eines einwertigen Metalls passiert. Das Elektronenband besteht aus Quantenzuständen, die so dicht beieinander liegen, dass man von einer quasikontinuierlichen Verteilung ausgehen kann. Jeder Quantenzustand wird von einem Atom des Kristalls "geliefert", so dass bei einem 2s-Zustand des Atoms wegen des Pauli-Verbots im Kristallgitter ein 2s-Band entsteht.

Energie

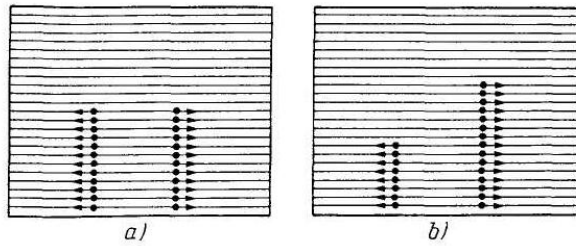


Fig. 1: a) thermodyn. Gleichgewicht b): gestörtes Gleichgewicht durch äußeres Feld  $E_x$

Jeder Elektronenzustand kann von zwei Elektronen entgegengesetzten Spins besetzt werden. Ohne äußeres Feld fließt kein Strom. Das elektrische Feld bewirkt nach Fig. 1, dass sich mehr Elektronen in Feldrichtung bewegen als in Gegenrichtung. Nach Abschalten des Feldes stellt sich nach der Relaxationszeit  $\tau$  aus dem Zustand b) der Zustand a) ein.

Die Elektronenkinetik lässt sich anschaulicher mit Hilfe der Begriffe der kinetischen Gastheorie beschreiben. Nach (9) bewegt sich das Elektron im äußeren elektrischen Feld geradlinig beschleunigt. Diese Beschleunigungsphase liegt zwischen zwei Kollisionen mit Gitterstörungen (Reibungskraft). In dieser Phase hat das Elektron eine mittlere freie Weglänge  $\Lambda$  zurückgelegt. Für diesen Weg  $\Lambda$  benötigt das Elektron eine mittlere freie Flugzeit  $\tau^*$ . Jetzt interessiert der natürlich vorhandene Zusammenhang von Relaxations- und Flugzeit. Für ein einfaches Stoßmodell, in dem jede Kollision das Elektron in den thermodynamischen Gleichgewichtszustand streut, ist  $\tau = \tau^*$ . Die Impulsänderung des Elektrons ist in diesem Modell maximal:  $p_{\max}$ . Wenn die Kollision schwächer ist (Impulsänderung  $p < p_{\max}$ ) dann gilt:  $\tau^*/\tau = p/p_{\max}$ .

Die Relaxationszeit  $\tau$  kann bei schwacher Reibungskraft (mittlerer Streuwinkel  $< 90^\circ$ ) deutlich größer sein als die Flugzeit  $\tau^*$ . Die mittlere freie Flugzeit kann man aus

$$\tau^* = \frac{\Lambda}{v} \quad (19)$$

errechnen. Nach (6) und (16) hat ein Elektron die Gesamtgeschwindigkeit

$$v_g = v + \langle v_x \rangle \quad (20)$$

Sie addiert sich auf aus der statistischen (thermischen) Geschwindigkeit  $v$  und aus der Driftgeschwindigkeit  $\langle v_x \rangle$ . Nach (6) ist  $v = \sqrt{3k_B T / m}$ . Für 300 K folgt daraus  $v = 1,2 \times 10^5$  m/s .

Wenden wir zur Abschätzung der Driftgeschwindigkeit (10) auf einen 1,6 cm starken Kupferstab an durch den ein Strom von 1 A fließt, weil ein elektrisches Feld anliegt, dann erhalten wir  $\langle v_x \rangle = 3,7 \times 10^{-7}$  m/s. (Kupfer ist einwertig und hat eine atomare Dichte von  $8,45 \times 10^{22}$  cm<sup>-3</sup>). Das repräsentative Beispiel verdeutlicht die Situation: Die mit hoher Geschwindigkeit ungerichtet herumwirbelnden Elektronen bewegen sich in diesem Chaos mit sehr langsamer Driftgeschwindigkeit entgegen der Feldrichtung. In (19) wird zur Bestimmung der mittleren freien Flugzeit die thermische Geschwindigkeit eingesetzt. Die Driftgeschwindigkeit kann vernachlässigt werden. Nun gilt (6) für freie Elektronen. Die Boltzmann-Gleichung zeigt aber, dass die Elektronen im Kristall nicht frei sind. Die statistische Geschwindigkeit der Elektronen in einem Kristall kann aus dessen elektronischer Bandstruktur  $E(k)$  nach

$$v = \frac{2\pi}{h} \cdot \frac{dE}{dk} \quad (21)$$

berechnet werden. Der Begriff elektronische Bandstruktur wurde bereits im Zusammenhang mit einer ortsabhängigen Elektronenenergie (Fig. 1) erwähnt. Beim Aufbau eines kristallinen Festkörpers aus isolierten Atomen ("Atomkondensation") ändert sich die Energie der in der äußersten Schale vorhandenen Elektronen (Bindungselektronen). Als Teilchen mit halbzahligen Spin (Fermionen) müssen sie ihre vor der Kondensation übereinstimmenden Energiewerte aufgeben (Pauliverbot). Aus einem im Atom scharfen Energieniveau entsteht durch diese atomare Wechselwirkung ein Energieband. Sichtbar wird diese Niveauverbreiterung z.B. beim Vergleich von Emissionsspektren verschiedener Hg-Dampflampen: Während eine Niederdrucklampe ein Linienspektrum emittiert, erkennt man bei der Hochdrucklampe breite Bänder (Versuch Planck-Konstante). Neben der Niveauverbreiterung bewirkt die Kondensation zum Festkörper, dass sich die Außenelektronen von ihrem jeweiligen Atomrumpf weit entfernen können. Im Unterschied zu diesen Valenzelektronen bleiben die anderen Rumpfelektronen am jeweiligen Atomkern lokalisiert.

Der Ladungstransport soll nach (6) im Modell freier Elektronen beschrieben werden: aus den Valenzelektronen werden Leitungselektronen. Die dazu notwendigen Modellannahmen sind:

- Die Leitungselektronen haben untereinander keine Coulombwechselwirkung.
- Die potentielle Energie der Leitungselektronen im Kristall ist klein gegenüber ihrer kinetischen Energie.

Damit kann auch eine Ortsabhängigkeit des Potentials vernachlässigt werden. Die fragwürdigen Annahmen werden mit folgender Ladungsverteilung begründet (Fig. 2).

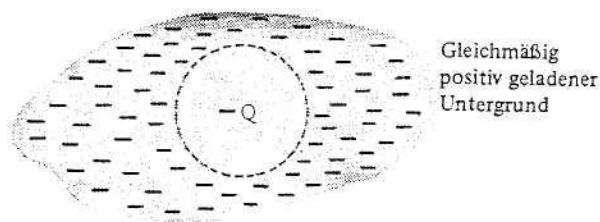


Fig. 2: Neutralisierungsmodell einer Elektronenladung

Die Atomrümpfe bilden einen homogenen positiv geladenen Ladungsuntergrund, in dem die Leitungselektronen einen Elektronensee bilden. Die positive Ladung verhindert offensichtlich, dass die Elektronen via Coulombwechselwirkung auseinander fliegen. Nach Fig. 2 kommt eine zusätzliche Probeladung als Sonde in diesen Elektronensee. Die Coulombkraft drückt den See von der negativ geladenen Sonde weg. Aber nur so weit, bis der (freigelegte) positive Untergrund die Störladung neutralisiert hat. Nun kann man sich jedes einzelne Elektron des Sees als Probeladung vorstellen und auf die genannte Art neutralisieren. Elektron für Elektron wird die negative Ladung durch den positiven Untergrund abgeschirmt. Das ist der Grundgedanke der "Eielektronennäherung". Jedes Elektron wird von einer positiven Ladung von Nachbarerlektronen abgeschirmt, wobei letztere dem gleichen Abschirmeffekt unterliegen. Anders gesagt: Die langreichweitige Coulombwechselwirkung wird in eine kurzreichweitige umgewandelt. Diese 2. Annahme wird in Fig. 3 illustriert. In der Reihe der Atomrümpfe fallen die Elektronen nicht in Pfeilrichtung in die Potentialmulden (Lokalisierung der Leitungselektronen am Atomrumpf), weil ihre kinetische Energie in dem Leitungsband zu groß ist. Der Größenunterschied zwischen kinetischer und potentieller Energie ist aus der relativen Lage zwischen den (gegenüber dem freien Atom abgesenkten) Potentialbergen und der Unterkante des Leitungsbandes ersichtlich.

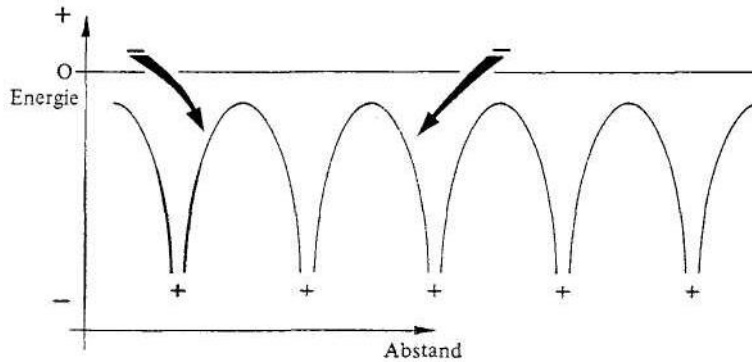


Fig. 3 : Potentielle Energie in einer Reihe von Atomrümpfen

Nachdem die Begründung für das Modell freier Elektronen vorliegt, können wir uns (nach Gl. 21) seinen Grenzen zuwenden. Für freie Elektronen ist die Energie mit dem Impuls über

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (22)$$

gekoppelt. Da Elektronen je nach Versuchsbedingungen neben Teilchen- (22) auch Welleneigenschaften zeigen (Versuch Elektronenbeugung), ist unter Berücksichtigung der de-Broglie-Beziehung

$$\lambda p = h, \quad (23)$$

die die Teilchengröße (Impuls  $p$ ) mit der Wellengröße (Wellenlänge  $\lambda$ ) verknüpft, neben (22) auch die folgende Relation (24) gültig:

$$E = \frac{h^2}{2m\lambda^2}. \quad (24)$$

Mit der Wellenzahl

$$k = 2\pi / \lambda \quad (25)$$

folgt

$$E = \left( \frac{h}{2\pi} \right)^2 \cdot \frac{k^2}{2m} = \hbar^2 \frac{k^2}{2m} \quad (26)$$

Die elektronische Bandstruktur freier Elektronen zeichnet sich durch einen parabelförmigen  $E(k)$ -Verlauf aus. Der Potentialverlauf in Fig. 3 lässt vermuten, dass der Begriff des freien Elektrons in der Nähe der positiven Atomrümpfe (deren Abstand sei  $d$ ) nicht anwendbar ist. In der Sprache der Wellenmechanik äußert sich das in Unstetigkeiten im Parabelbild für die charakteristischen Wellenzahlwerte  $k = n \pi / d$  (Fig. 4). Für diese  $k$ -Werte ist nach (21) die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit gleich Null. So entstehen die in Fig. 4 angegebenen, verbotenen Energiebereiche. Diese Bandstruktur beschreibt sowohl Metalle als auch Halbleiter und Isolatoren. Bildet man mit Hilfe von (26)  $d^2 E / dk^2$ , dann erhält man für freie Elektronen

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2} \quad (27)$$

Da die Krümmung der  $E(k)$ -Abhängigkeit von der Wellenzahl selbst abhängt, ist  $m(k)$  natürlich nicht die Masse des freien Elektrons. Die Masse des Elektrons im Festkörper ist nach Fig. 4 an der oberen Bandkante ( $|k| = \pi/d$ ) sogar negativ! Deshalb bezeichnen wir (27) als Definitionsgleichung der effektiven Masse der Ladungsträger im kristallinen Festkörper.

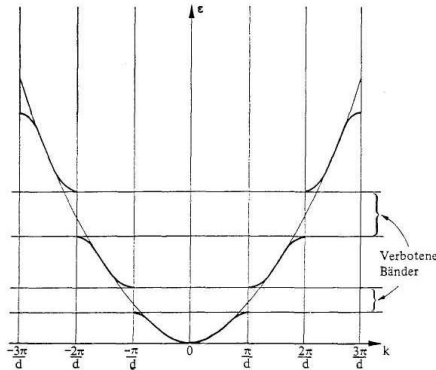


Fig. 4 Elektronische Bandstruktur  $E(k)$  im Modell nahezu freier Elektronen (NFE-Näherung)

Von den Ladungsträgern ergeben sich offensichtlich im Festkörper zwei Arten: An der unteren Bandkante (um  $k = 0$ ) finden wir Elektronen mit der Ladung  $-e$  und  $m > 0$ . Im Umkehrschluss folgt aus  $m < 0$  das die Ladung um  $|k| = \pi/d$  positiv ( $+e$ ) sein muss, denn nur dann kann Gl. 7 für beide Fälle angewendet werden. Hier begegnen wir erstmals den für die Halbleiter so bedeutsamen komplementären Ladungsträgern, die Löcher oder auch Defektelektronen genannt werden. Dass diese sich "umgepolt" benehmen, sieht man auch an ihrer statistischen Geschwindigkeit (Fig. 5). An der unteren Bandkante ist  $v$  proportional  $k$ , an der oberen Bandkante dagegen gilt  $v(-k)$ .

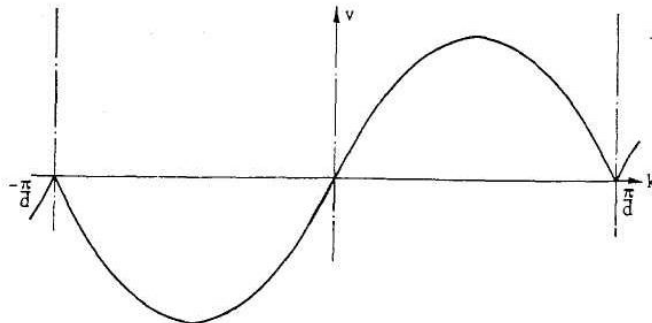


Fig. 5:  $v(k)$  im erlaubten Energieband (1. Brillouin-Zone)

Für unsere Experimente mit dem Halbleiter Germanium können wir davon ausgehen, dass die Elektronen in der Nähe der unteren Kante des Leitungsbandes sich ebenso wie freie Ladungsträger verhalten wie die Löcher an der Oberkante des Valenzbandes.

## 2. Halbleiter

Metalle leiten den elektrischen Strom gut, weil die nicht vollständig gefüllten Energiebänder den Elektronen erlauben, aus dem äußeren elektrischen Feld kinetische Energie aufzunehmen. Innerhalb eines Energiebandes sind die Zustände bis zum **Fermi-Niveau**  $E_F$  mit Elektronen besetzt, die höherenergetischen Quantenzustände sind frei. Bei den Halbleitern füllen die Bindungselektronen die Zustände des Valenzbandes vollkommen auf, so dass dieses Band zunächst keinen Beitrag zur elektrischen Leitfähigkeit leisten kann. Für  $T = 0$  K ist der Halb-

leiter ein Isolator (Fig. 6).

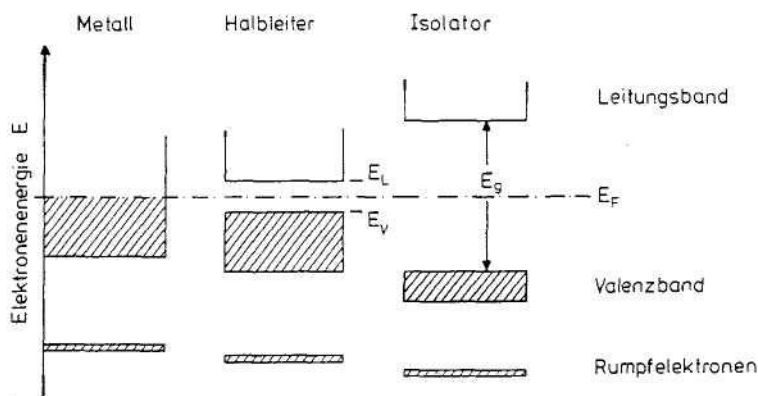


Fig. 6: Energieschema für Metalle, Halbleiter und Isolatoren

Beide unterscheidet die Größe der Bandlücke  $E_g$  zwischen dem mit Elektronen vollbesetzten Valenzband und dem Leitungsband der unbesetzten Zustände (vgl. Fig. 4). Wenn die Energielücke genügend schmal ist, können durch thermische Anregung (oder auch optisch) Elektronen in das Leitungsband gelangen. Dort sind sie frei (besser "quasifrei", weil ja noch im Halbleiter) für die Aufnahme von Energie aus einer äußeren Quelle. Durch die Anregung wird im Halbleiter eine chemische Bindung (kovalente Bindung) aufgebrochen. Das Elektron verlässt seinen Atomrumpf, es kann sich (mit der äußeren Hilfe) zwischen den Atomrümpfen bewegen, so wie es für Elektronen in einer metallischen Bindung für alle Temperaturen möglich ist.

Trotzdem sind bei ausreichend hohen Temperaturen Metalle und Halbleiter in ihrem elektrischen Leitvermögen grundsätzlich verschieden. Das hängt mit den bereits erwähnten Löchern als zweite Ladungsträgerart zusammen (Fig. 4). Das Elektron im Leitungsband hinterlässt im Valenzband eine (positive) Elektronenlücke, die an einem Atomrumpf entsteht. Aus einem benachbarten Atom kann diese Lücke aufgefüllt werden. Die positive Lücke wandert also entgegengesetzt zum Elektronenstrom und beteiligt sich am Ladungstransport als Löcherstrom. Analog zu Gl. 18 ist die Leitfähigkeit eines Halbleiters gegeben durch eine "Zweibandleitung":

$$\sigma = n(-e) \cdot (-\mu_n) + p(+e) \cdot \mu_p = e(n\mu_n + p\mu_p) \quad (28)$$

$n$  und  $p$  sind die Ladungsträgerkonzentrationen in Leitungs- bzw. Valenzband,  $\mu_n$  und  $\mu_p$  sind die Elektronen- bzw. Löcherbeweglichkeit. Im Allgemeinen ist  $\mu_p < \mu_n$  (warum?).

Wenn (siehe Fig. 6)

$$E_L - E_F \geq 4k_B T \text{ ist,} \quad (29)$$

gilt für die Leitungsband-Elektronenkonzentration

$$n = D_L \cdot e^{-\frac{E_L - E_F}{k_B T}} \quad (30)$$

Mit der Einschränkung (29) steht in (30) an Stelle der Fermi-Dirac-Verteilung (Fermistatistik) die Boltzmann-Verteilung als Ausdruck für die Besetzungswahrscheinlichkeit für die Zustände der Zustandsdichte  $D_L$ . Mit (29) erreicht man ein verdünntes Elektronengas im Leitungsband, so dass nur wenige Zustände der in großer Zahl der zur Verfügung stehenden besetzt sind. Dann ist es ohne großen Fehler möglich, die Quantenstatistik durch die klassische Sta-

tistik zu ersetzen.

Die Zustandsdichte ist energieabhängig:  $D_L \sim E^{0,5}$  (Fig.7). Für eine geringe Besetzungsdichte im Leitungsband ersetzt man das Energieband durch das Energieniveau  $E_L$  der unteren Bandkante mit einer temperaturabhängigen Zustandsdichte (effektive Zustandsdichte  $N_L$  der Nichtentartungsnäherung):

$$n = N_L \cdot e^{-\frac{E_L - E_F}{k_B T}} \quad \text{mit} \quad N_L = 2 \left( \frac{m_n^* \cdot k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (31)$$

Für die elektrische Leitfähigkeit maßgebend ist neben der Elektronenleitung im Leitungsband die Löcherleitung im Valenzband.

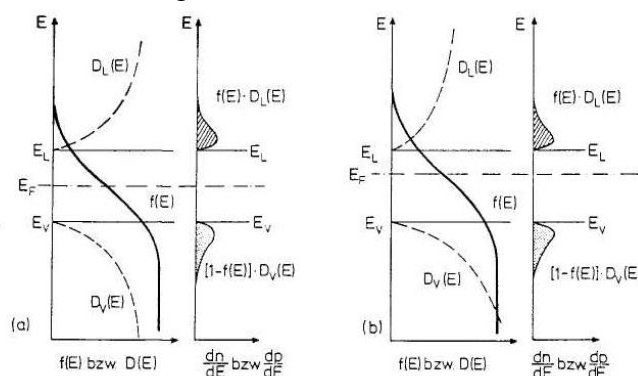


Fig. 7: Energieabhängigkeit von Zustandsdichten und Besetzungswahrscheinlichkeiten für gleiche und verschiedene Zustandsdichten von Leitungs- und Valenzband: Ladungsneutralität:  $n = p$  (Eigenleitung; intrinsischer Halbleiter)

Analog zu (31) gilt für die gering besetzten (also nur gering von Elektronen befreiten) Zustände in der Nähe der Oberkante des Valenzbandes:

$$p = N_V \cdot e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} \quad \text{mit} \quad N_V = 2 \left( \frac{m_p^* \cdot k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (32)$$

Die effektiven Zustandsdichten beider Energiebänder sind i.a. verschieden voneinander, weil die effektiven Massen der Elektronen  $m_n^*$  und die der Löcher  $m_p^*$  nicht übereinstimmen. Diese Unterschiede ergeben sich (ohne Vorzeichenberücksichtigung) aus der unterschiedlichen Bandkrümmung des  $E(k)$ -Verlaufs für Valenz- und Leitungsband (27), man vergleiche Fig. 8.

Mit dem "Hilfsmittel" der effektiven Masse kann der Ladungsträger als freies Teilchen beschrieben werden. Die effektive Masse weicht von der Masse des freien Elektrons ab und ist richtungsabhängig (anisotrop), also ein Tensor. Die Abweichung ist umso größer, je stärker die potentielle Energie (als vernachlässigte Größe) auf die Elektronenbewegung einwirkt. Setzt man  $m_n^* = m_p^* = m_0$  und  $T = 300$  K, dann ist die effektive Zustandsdichte in (31) und (32)  $N_L = N_V = 2,45 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ . Für Germanium dagegen ist für die Oberkante des Valenzbandes (Fig. 8:  $\Gamma$ ; entartet!)  $N_V = 6 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , für die Unterkante des Leitungsbandes (L)  $N_L = 1,04 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ . Formal ist also ein überraschendes Ergebnis zu erkennen:  $m^* < m_0$ . Eigentlich hätte man wegen der quasifreien Teilchen  $m^* > m_0$  erwartet, so wie es für Metalle auch zutrifft. Wie ist diese Besonderheit für Halbleiter zu erklären? Multipliziert man (31) mit (32), so erhält man

$$n \cdot p = N_L \cdot N_V \cdot e^{-\frac{E_L - E_V}{k_B T}} \quad (33)$$

Mit

$$n \cdot p = n_i^2 \quad (34)$$

ergibt sich die Eigenleitungskonzentration  $n_i$  des Halbleiters, die von den charakteristischen Halbleiterdaten und der Temperatur abhängt:

$$n_i = 4,9 \cdot 10^{15} \cdot (m_n^* \cdot m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot T^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \quad (35)$$

Nach Fig. 6 und (28) ist bei einem Elektronenübergang vom Valenzband in das Leitungsband über die Energieschwelle  $E_g$ :  $n = p$ . Mit der Eigenleitungskonzentration  $n_i$  ist damit

$$\sigma = e \cdot n_i \cdot (\mu_n + \mu_p) \quad (36)$$

(36) charakterisiert den Zustand der Eigenleitung (intrinsischer Halbleiter).

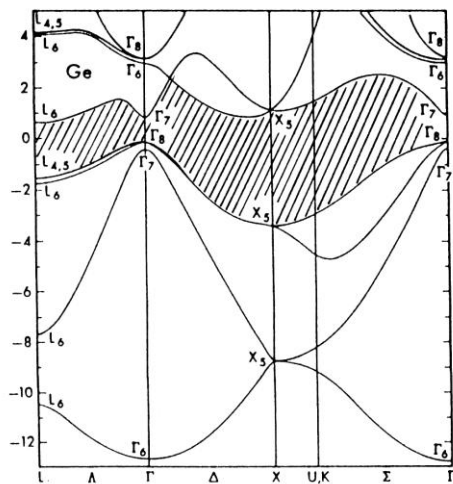


Fig. 8: Elektronische Zustandsdichte und elektronische Bandstruktur von Germanium (Theoretische Rechnungen von J.R. Chelikowsky und M.L. Cohen aus dem Jahre 1974)

In der ersten Aufgabe des Experimentes untersuchen wir die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit. Wegen (35) und (36) interessiert in diesem Zusammenhang die Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit der Ladungsträger:  $\mu = e \tau / m$  (nach Gl. 17 und 18). Beschreibt man die Streuung der Elektronen an den Gitterschwingungen als Elektron-Phonon-Kollision, dann gilt mit (19)  $\mu = e \Lambda / m v$ . Da  $v$  proportional  $T^{1/2}$  ist, bleibt noch die Betrachtung der Temperaturabhängigkeit der freien Weglänge  $\Lambda$ . Sie ist umgekehrt proportional zur Zahl der Streuer, also zur Phononenkonzentration. Diese ist für Temperaturen  $T > 100$  K proportional zur Temperatur  $T$ . Also gilt  $\Lambda \propto 1/T$ . Daraus folgt eine Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit nach

$$\mu \propto T^{-\frac{3}{2}} \quad (37)$$

In (36) hebt sich die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit vor dem Exponentialausdruck (gegeben durch Gl. 35) weg. Trägt man  $\ln \sigma$  gegen  $10^3/T$  auf, erhält man die Breite  $E_g$  der

verbotenen Energiezone zwischen Valenzband und Leitungsband.

Aus theoretischen Rechnungen (Gl. 27; Fig. 8) kennt man die effektiven Massen von Germanium. Zur Vereinfachung nehmen wir für den intrinsischen Fall eine Zweibandleitung an (vgl. Fig. 8). Es gilt

$$m_p = 0,37 \cdot m_0 ; m_n = 0,55 \cdot m_0 \text{ (Sterne entfallen von nun an)} \quad (38)$$

Mit diesen Werten kann aus (35) die intrinsische Ladungsträgerdichte berechnet werden. (Der Zahlenfaktor in (35) enthält bereits  $m_0$ , so dass von (38) nur die reinen Zahlenwerte eingesetzt werden).

### 3. Störstellenhalbleiter

Halbleiterbauelemente bestehen aus gezielt verunreinigten (dotierten) Kristallen. Verunreinigungsatome mit 5 Außenelektronen (Donatoren: P, As, Sb) substituieren partiell 4-wertiges Germanium im Kristallgitter. Das für die chemische Bindung im Ge-Wirtsgitter überflüssige Elektron ist deshalb schwächer an den Atomrumpf gebunden. Sein Atomorbital ist gegenüber den anderen im Kristall weiter ausgedehnt.

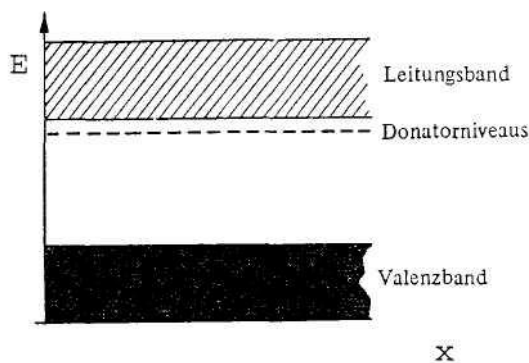


Fig. 9 : Lokalisierte Donatorniveaus in einem n-Störstellenhalbleiter (vgl. Zusatzaufgaben am Beginn).

Die energetische und die lokale Situation kann man grob aus dem Wasserstoffmodell abschätzen. Indem man gedanklich das Störatom durch ein Ge-Atom und ein H-Atom (in einer Ge-Matrix mit der relativen DK von  $\epsilon_r = 16$ ) ersetzt, ist dessen Aktivierungsenergie für den Grundzustand  $E_d = 13,6 \text{ eV} / \epsilon_r^2 = 0,05 \text{ eV}$ . Die Verkleinerung der potentiellen Energie gegenüber der im isolierten H-Atom bewirkt auch eine Ausdehnung des Orbitals auf das  $\epsilon_r$ -fache. Wegen der geringen Aktivierungsenergie liegen die Donatorniveaus dicht unter der unteren Leitungsbandkante (Fig. 9).

Die Donatoren emittieren daher bereits bei sehr niedrigen Temperaturen ( $T < 100 \text{ K}$ ) Elektronen in das Leitungsband. Nach dem "Massenwirkungsgesetz" für Halbleiter (34) reduziert sich die Zahl der Löcher, so dass  $n \gg p$  wird (n-Halbleiter). Analog zu (33) erhält man die Elektronenkonzentration im Leitungsband nach Emission aus den Donatoren zu:

$$n = \sqrt{N_d \cdot N_L} \cdot e^{-\frac{E_d}{2k_B T}} \quad (39)$$

Wird die Donatorkonzentration  $N_d$  so groß, dass sich die Störstellen-Orbitale überlappen, entsteht aus den lokalisierten Donatorniveaus ein Störstellenband. Die bei tiefen Temperaturen einsetzende Störstellenemission wird bei höheren Temperaturen durch die Valenzbandemis-

sion (Eigenleitung) fortgesetzt (Fig. 10 und 11). Störatome mit drei Außenelektronen (B; Ga; In) erzeugen in Germanium Elektronenniveaus dicht über der Valenzbandoberkante (Fig. 12).

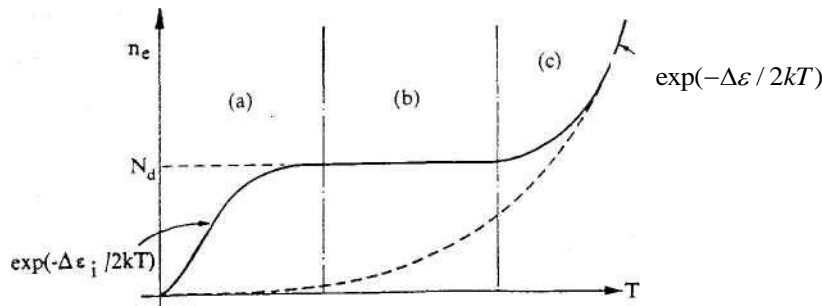


Fig. 10: a) n-Störstellenleitung b) Störstellenerschöpfung c) Eigenleitung (gestrichelt: Löcherkonzentration (Minoritätsladungsträger))

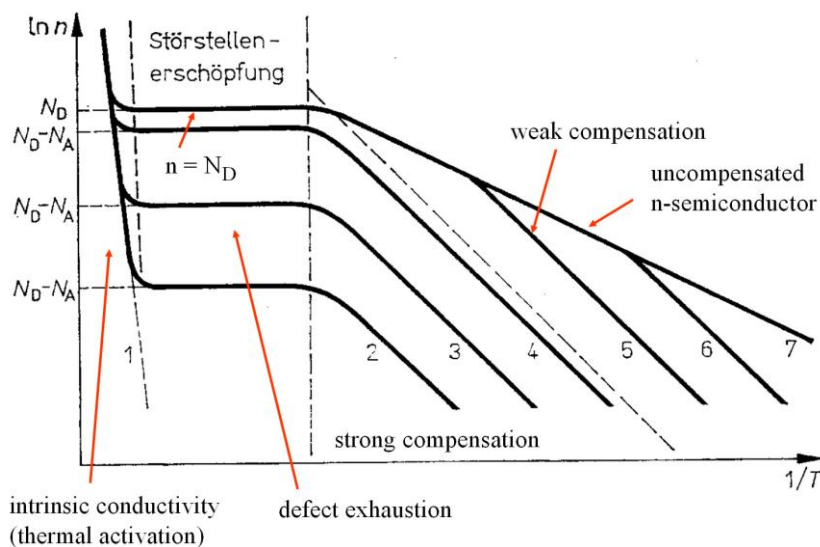


Fig. 11. Zu Fig. 10 vergleichbare Abbildung mit Darstellung gegen  $1/T$ . Was ist mit „Kompensation“ gemeint?

Im  $p$ -Leiter sind die Elektronen die Minoritätsladungsträger. Durch entsprechende Dotierungen gelingt es, die in (36) auftretenden drei Unbekannten auf zwei zu reduzieren. Übrig bleiben dann jeweils eine Ladungsträgerkonzentration und eine Beweglichkeit. Im Zusammenhang mit der Störstellenerschöpfung ist noch der Erwähnung wert, dass auch Halbleiter ein metallisches  $\rho(T)$ -Verhalten zeigen können (Fig. 13b).

Um Ladungsträgerkonzentration und Beweglichkeit bestimmen zu können, benötigt man neben der elektrischen Leitfähigkeit noch ein zweites Messverfahren. Das liefert uns der Halleffekt (Fig. 14).

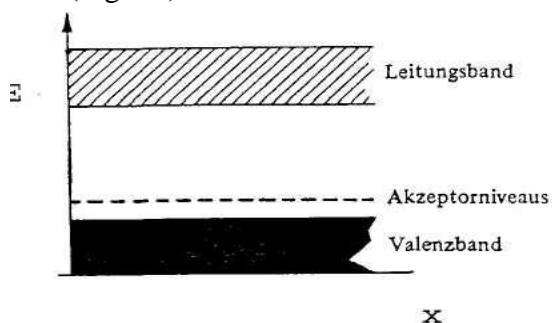


Fig. 12: Lokalisierte Akzeptorniveaus in einem  $p$ -Störstellenhalbleiter

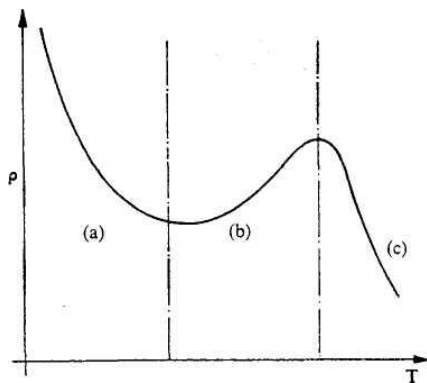


Fig. 13: Spezifischer Widerstand als Funktion der Temperatur a: Störleitung; b: Störleitung (Erschöpfung); c: Eigenleitung

#### 4. Der Hall-Effekt

Die Messanordnung ist in der folgenden Abbildung für einen p-Halbleiter dargestellt. Das Magnetfeld (Flussdichte  $B_z$ ) liegt senkrecht zum Löcherstrom (Stromdichte  $j_x$ ). Durch die Lorentzkraft werden die driftenden Ladungsträger (+e), die sich in Feldrichtung  $E_x$  bewegen, in Stromrichtung gesehen, nach rechts abgelenkt.

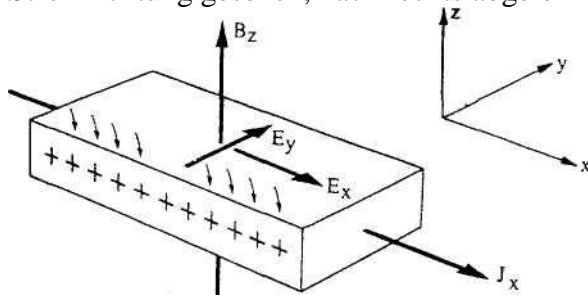


Fig. 14: Messung des Hall-Effektes für p-Leitung

Dadurch entsteht ein elektrisches Feld  $E_y$  (Hall-Feld nach Edwin Hall<sup>1</sup>). Die Feldkraft kompensiert die Wirkung der Lorentzkraft:

$$e \cdot E_y = e \cdot \langle v_x \rangle \cdot B_z \quad (40)$$

Mit (10), allerdings mit positivem Vorzeichen, ( $p$  als Löcherkonzentration), ist

$$\frac{E_y}{B_z j_x} = \frac{1}{e \cdot p} \quad (41)$$

Das Hall-Feld ergibt sich also zu

$$E_y = R_H \cdot B_z \cdot j_x \quad \text{mit} \quad (42)$$

$$R_H = \frac{1}{e \cdot p} \quad (43)$$

als Hall-Koeffizient. Im  $n$ -Störstellenhalbleiter verändert sich sowohl das Vorzeichen der Ladungsträger als auch das Vorzeichen der Driftgeschwindigkeit. Unter Beachtung von (10) ist

<sup>1</sup> Edwin Hall, amerikanischer Physiker, 1855-1938, entdeckte Hall-Effekt im Rahmen seiner Doktorarbeit 1879

dann analog zu (41)

$$\frac{E_y}{B_z j_x} = \frac{1}{e \cdot n} \quad (44)$$

Die Ablenkung der Elektronen erfolgt also (in der Anordnung nach Fig. 14) in die gleiche Richtung wie für Löcher. Der Unterschied besteht darin, dass  $E_y$  jetzt in negativer  $y$ -Richtung orientiert ist. Demnach gilt für n-Leitung:

$$E_y = -R_H \cdot j_x \cdot B_z \quad (45)$$

mit einem negativen Hall-Koeffizienten. Nach (36) ist für einen p-Störstellenhalbleiter die elektrische Leitfähigkeit

$$\sigma = e \cdot p \cdot \mu_p \quad (46)$$

Daraus folgt mit (43)

$$\sigma \cdot R_H = \mu_p \quad (47)$$

Auf die gleiche Weise lässt sich  $\mu_n$  bestimmen. Da die Ablenkung der Ladungsträger vorzeichenunabhängig ist, wird das Hall-Feld bei Eigenleitung wesentlich kleiner. Der Hall-Koeffizient ergibt sich zu

$$R_H = \frac{A}{e} \cdot \frac{p \cdot \mu_p^2 - n \cdot \mu_n^2}{(p \cdot \mu_p + n \cdot \mu_n)^2} \quad (48)$$

$A$  ist dabei der so genannte Sreufaktor, der sich durch die unterschiedliche Streumechanismen der Ladungsträger ergibt. Für große Felder kann er mit  $A = 1$  angenähert werden. Eine weitere Messgröße in der Anordnung des Hall-Effektes ist der Magnetowiderstand. Die Kompensationswirkung des Hall-Feldes auf die Lorentzkraft (40) gilt nur für eine Geschwindigkeit in der Verteilung. Schnellere und langsamere Ladungsträger werden sich nicht mehr geradlinig, sondern auf längeren Strompfaden auf der einen oder anderen Seite bewegen (Fig. 15).

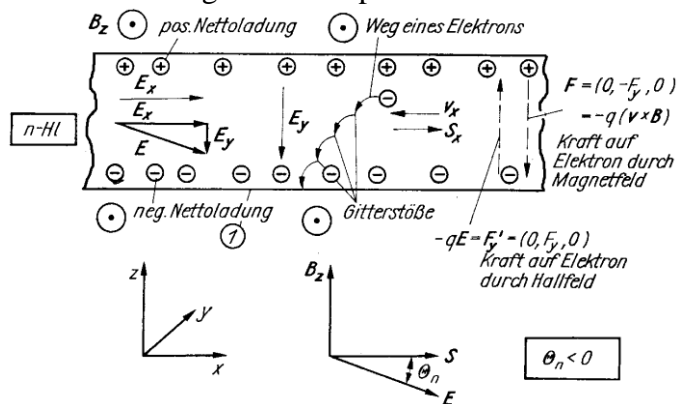


Fig. 15: Ungradlinige Ladungsträgerbewegung beim Hall-Effekt.

Man erwartet dann gegenüber dem spezifischen Widerstand  $\rho_0$  ohne Magnetfeld eine Änderung:

$$\rho(B) = \frac{E_x}{j_x} \quad (49)$$

Der Magnetowiderstand nimmt mit abnehmender Temperatur stark zu. Besondere Effekte kann man natürlich auch im Fall der Eigenleitung erwarten, da dort das Hall-Feld durch Selbstkompensation sehr klein ist.

## 5. Magnetowiderstand

Für die überwiegend kovalente Bindung der Elementhalbleiter gelten folgende Relationen zwischen den spezifischen Widerständen  $\rho_B$  im Magnetfeld bzw.  $\rho_0$  ( $B=0$ ) und den Beweglichkeiten der Ladungsträger sowie dem Magnetfeld (Flussdichte:  $B$ ):

$$1) \text{ Eigenleitung: } \frac{\rho_B - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{9\pi}{16} \cdot \mu_n \cdot \mu_p \cdot B^2 \quad (50)$$

Der linke Term in (50) wird üblicherweise Magnetowiderstand genannt.

$$2) \text{ Störstellenleitung: } \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\pi}{10} \cdot \mu \cdot B^2 \quad (51)$$

## 6. Thermomagnetische Effekte

Nach Fig. 14 werden Ladungsträger in  $y$ -Richtung abgelenkt. Dadurch verarmt die Region um  $(-y)$  an Ladungsträgern. Die Träger des elektrischen Stromes sind aber gleichzeitig Träger von Wärme in Form ihrer kinetischen Energie. Folglich wird sich in  $y$ -Richtung ein Energieausgleich zwischen den "heißen" Elektronen und den niedriger temperierten Gitterschwingungen vollziehen. Mit dieser Gleichgewichtseinstellung erhöht sich die Temperatur in  $y$ -Richtung. Umgekehrt erniedrigt sich die Temperatur in  $-y$ -Richtung. Dieser Temperaturgradient  $\Delta T$  baut nach dem Seebeck-Effekt eine Thermospannung auf:  $U_{th} = \alpha \cdot \Delta T$ . Diese überlagert sich der Hall-Spannung. Unter unseren Bedingungen (Ladungsträgerkonzentration, Temperaturbereich) ist  $\alpha \approx 1 \text{ mV/K}$ . Diesem transversalen thermomagnetischen Effekt (**Ettingshausen-Effekt**) überlagert sich als longitudinaler Effekt der **Nernst-Effekt**. Die schnellen Elektronen "nehmen" in  $x$ -Richtung thermische Energie mit, so dass in  $x$ -Richtung die Temperatur ebenfalls ansteigt. Beachten Sie diese Effekte bei ihren Messungen. Wie kann man den Einfluss dieser beiden Effekte bei unseren Messungen verringern?